

文章编号:1672-6413(2014)05-0141-03

# 工业机器人笛卡尔空间轨迹规划

林威, 江五讲

(华中科技大学 机械科学与工程学院, 湖北 武汉 430074)

摘要: 研究了在笛卡尔坐标系中工业机器人空间直线及圆弧轨迹规划问题, 提出利用抛物线过渡的空间直线插补算法和基于局部坐标系的空间圆弧插补算法。以上算法在自行设计的五自由度喷涂机器人上进行了实验验证。实验结果表明, 该直线和圆弧插补算法能保证机器人运行平稳, 轨迹衔接平滑。

关键词: 工业机器人; 笛卡尔空间; 轨迹规划; 空间插补

中图分类号: TP242.2 文献标识码: A

## 0 引言

在机器人笛卡尔空间规划系统中, 作业是用末端位姿的齐次变换矩阵序列规定的, 轨迹规划就是根据描述的作业计算出运动的位移、速度和加速度, 生成运动轨迹<sup>[1]</sup>。工业机器人的轨迹规划既可以在关节空间也可以在笛卡尔空间中进行, 但是轨迹曲线都必须平滑, 以保证机器人运行平稳。关节空间的轨迹规划相对简单, 但是其末端的运动轨迹不直观; 笛卡尔空间的轨迹规划不仅概念上直观, 而且规划的路径准确, 可以清晰地观测到末端执行器的运动轨迹<sup>[2,3]</sup>。目前工业机器人使用的最广泛的方法是示教再现, 也就是根据任务的需要, 记录轨迹上一些关键点, 而要想使末端执行器严格地按照所要求的轨迹运动, 则必须取得足够的点。机器人的运动轨迹一般都是圆弧或者直线, 复杂的运动轨迹一般用直线和圆弧对其拟合而得到, 这是机器人实现复杂运动轨迹的关键<sup>[4,5]</sup>。本文提出了利用抛物线过渡的空间直线插补算法和基于局部坐标系的空间圆弧插补算法, 保证了实验室自行设计的五自由度喷涂机器人运动的平稳性。

### 1 基于抛物线过渡的空间直线插补

直线的轨迹规划是已知直线的起点和终点的位置和姿态, 求解直线轨迹上插补点的位置和姿态, 并保证机器人位置及姿态平稳过渡。

假设机器人末端由  $P_1$  点沿直线运动到  $P_2$  点,  $(x_1, y_1, z_1)$  和  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  分别为起点  $P_1$  的位置和 RPY 角,  $(x_2, y_2, z_2)$  和  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  分别为终点  $P_2$  的位置和 RPY 角,  $(x_i, y_i, z_i)$  和  $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$  分别为中间插补点  $P_i$  的位置和 RPY 角, 如图 1 所示。

各插补点的位置和姿态可由公式(1)求出:

$$\begin{cases} x_i = x_1 + \lambda \Delta x \\ y_i = y_1 + \lambda \Delta y \\ z_i = z_1 + \lambda \Delta z \\ \alpha_i = \alpha_1 + \lambda \Delta \alpha \\ \beta_i = \beta_1 + \lambda \Delta \beta \\ \gamma_i = \gamma_1 + \lambda \Delta \gamma \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\lambda$  为归一化因子;  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \gamma$  为位置和 RPY 角的增量, 其求解如下:

$$\begin{cases} \Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta y = y_2 - y_1 \\ \Delta z = z_2 - z_1 \\ \Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \\ \Delta \beta = \beta_2 - \beta_1 \\ \Delta \gamma = \gamma_2 - \gamma_1 \end{cases} \quad (2)$$

$\lambda$  归一化因子采用抛物线过渡的线性函数, 以保证整段轨迹上的位移和速度都连续。抛物线过渡的线性函数是对两点的位姿使用线性插值时, 在两点的邻域内增加一段抛物线的缓冲区段。假设两端的抛物线运动时间相等, 即在两个过渡区域中的加速度值相同、符号相反。设  $\lambda'$  为  $\lambda$  对时间的导数,  $\lambda'$  随时间  $t$  变化的曲线如图 2 所示。

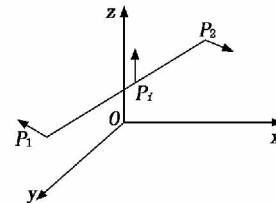


图1 直线运动示意图

设直线的速度为  $v$ , 抛物线段的加速度为  $a$ , 那么抛物线段的运动时间  $T_p$  和位移  $L_p$  分别为:

收稿日期: 2013-12-23; 修回日期: 2014-03-27

作者简介: 林威 (1989-), 男, 湖北孝感人, 在读硕士研究生, 主要从事机器人控制软件开发的研究。

$$T_p = \frac{v}{a} \tag{3}$$

$$L_p = \frac{1}{2} a T_p^2 \tag{4}$$

直线运动总位移和时间分别为：

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{5}$$

$$T = 2T_p + \frac{L - 2L_p}{v} \tag{6}$$

$$\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2} a_\lambda t^2 & 0 \leq t \leq T_{p\lambda} \\ \frac{1}{2} a T_{p\lambda}^2 + a_\lambda T_{p\lambda} (t - T_{p\lambda}) & T_{p\lambda} < t \leq 1 - T_{p\lambda} \\ \frac{1}{2} a T_{p\lambda}^2 + a_\lambda T_{p\lambda} (t - T_{p\lambda}) - \frac{1}{2} a_\lambda (t + T_{p\lambda} - 1)^2 & 1 - T_{p\lambda} < t \leq 1 \end{cases} \tag{10}$$

其中： $t = i/N, i = 0, 1, 2, \dots, N, N$  为插补点个数， $i = 0$  代表起点， $i = N$  代表终点。将所求  $\lambda$  代入式(2)即可求得各插补点的位置和姿态。求得各插补点的位置和姿态后，再通过运动学反解，可以得到各插补点对应的关节角度值。

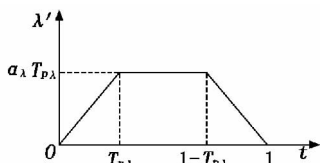


图2  $\lambda'$  随时间  $t$  变化的曲线

### 2 基于局部坐标系的空间圆弧插补

假设机器人末端执行器从起始位置  $P_1$  经过中间点  $P_2$  到达终点  $P_3$ ，若这3点不共线，则一定存在从  $P_1$  经  $P_2$  到  $P_3$  的圆弧。按照以下步骤进行空间圆弧的轨迹点位置的插补，如图3所示。

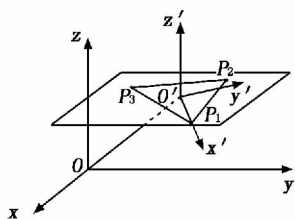


图3 坐标系与局部坐标系

(1) 求圆心坐标  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  及半径  $R$ 。由  $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$  三点可确定平面，得方程：

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

根据圆心到三点的距离都为半径可列出下列方程：

$$\begin{cases} R^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \\ R^2 = (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2 \\ R^2 = (x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 + (z_3 - z_0)^2 \end{cases} \tag{12}$$

联立方程，可求出圆心  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ，进而求出半径  $R = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$ 。

(2) 建立圆弧所在平面的新坐标系。取圆心  $P_0$  为新坐标系原点  $O'$ ， $P_0P_1$  方向为  $x'$  轴方向，其单位方

对抛物线段的位移、时间、加速度归一化处理得：

$$L_{p\lambda} = \frac{L_p}{L} \tag{7}$$

$$T_{p\lambda} = \frac{T_p}{T} \tag{8}$$

$$\alpha_\lambda = \frac{2L_{p\lambda}}{T_{p\lambda}^2} \tag{9}$$

则  $\lambda$  的计算公式为：

向量为：

$$x' = \frac{P_0P}{|P_0P|}$$

$P_1P_2$  和  $P_2P_3$  决定圆弧所在平面，取垂直于此平面的方向为  $z'$  轴，其单位方向向量为：

$$z' = \frac{P_1P_2 \times P_2P_3}{|P_1P_2 \times P_2P_3|}$$

根据右手法则， $y'$  轴的单位方向向量为：

$$y' = z' \times x'$$

用齐次变换矩阵  $T_R$  描述新坐标系  $O'-x'y'z'$  相对于原坐标系  $O-xyz$  的位姿，则：

$$T_R = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x & x_0 \\ x'_y & y'_y & z'_y & y_0 \\ x'_z & y'_z & z'_z & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 将  $P_1, P_2, P_3, P_0$  从原坐标系  $O-xyz$  变换到新坐标系  $O'-x'y'z'$ 。设  $P_1, P_2, P_3, P_0$  在原坐标系  $O-xyz$  中的坐标值分别为  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_0, y_0, z_0)$ ，在新坐标系  $O'-x'y'z'$  中的坐标值分别为  $(x'_1, y'_1, z'_1), (x'_2, y'_2, z'_2), (x'_3, y'_3, z'_3), (x'_0, y'_0, z'_0)$ ，则：

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \\ 1 \end{bmatrix} = T_R^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \\ z'_2 \\ 1 \end{bmatrix} = T_R^{-1} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_3 \\ y'_3 \\ z'_3 \\ 1 \end{bmatrix} = T_R^{-1} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由建立的新坐标系  $O'-x'y'z'$  可知： $x'_0 = y'_0 = z'_0 = 0, z'_1 = z'_2 = z'_3 = 0, x'_1 = R$ 。

(4) 在新坐标系  $O'-x'y'z'$  上进行圆弧插补。设圆弧上一点  $p$  在  $O'-x'y'z'$  中的坐标为  $(x', y', z')$ ，对应的归一化因子为  $\lambda$ ，从  $P_1$  到  $p$  的角度为  $\theta$ ，从  $P_1$  到  $P_3$  的角度为  $\theta'$ ，则：

$$\theta = \lambda \theta'$$

$$\begin{cases} x' = R \cos \theta \\ y' = R \sin \theta \\ z' = 0 \end{cases}$$

(5) 将新坐标系上的插补点的值转换到原坐标系中。设点  $p$  在原坐标系  $O-xyz$  中的坐标值为  $(x, y, z)$ , 对应的  $p'$  在新坐标系  $O'-x'y'z'$  中的坐标值为  $(x', y', z')$ , 则:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = T_R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

根据以上步骤,可以得到圆弧上各插补点的位置。各插补点的姿态可由下面方程求出:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 + \lambda \Delta \alpha \\ \beta = \beta_1 + \lambda \Delta \beta \\ \gamma = \gamma_1 + \lambda \Delta \gamma \end{cases}$$

求得各插补点的位置和姿态后,再通过运动学反解,可以得到各插补点对应的关节角度值。

### 3 实验分析

以实验室自行设计的五自由度喷涂机器人为实验平台,验证以上算法。该机器人结构示意图如图 4 所示。

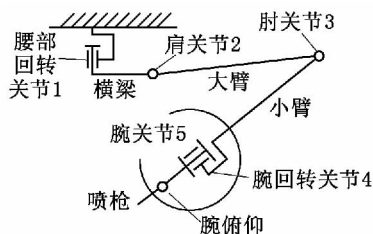


图 4 喷涂机器人结构示意图

对于直线运动,给定机器人末端起点、终点对应的关节角度;对于空间圆弧运动,给定机器人末端起点、中间点、终点对应的关节角度,通过运动学正解求出两点对应的位姿矩阵,然后采用前面提出的轨迹规划算法进行插补运算,得到各插补点的位姿,最后通过运动学反解,求得各插补点对应的各关节角度。通过示教的方式进行实验,由轨迹规划得到的结果画出各关节角度变化图,设定运动为一段空间直线  $P_1P_2$ 、一段平面圆弧  $P_2P_3P_4$ 、一段空间圆弧  $P_4P_5P_6$ ,如图 5 所示,得到的各关节角度随时间的变化如图 6 所示。图 6 中,  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  和  $\theta_5$  分别对应图 4 中关节 1、关节 2、关节 3、关节 4 和关节 5 的角度。

根据以上实验分析可知,按照示教的轨迹,采用基于抛物线过渡的空间直线插补算法和基于局部坐标系的空间圆弧插补算法,使实验五自由度喷涂机器人成功

按照要求的轨迹进行运动,且运行平稳,轨迹衔接平滑。

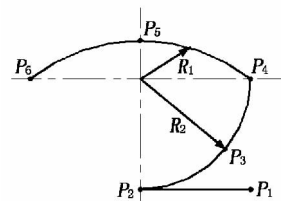


图 5 设定的运动轨迹图

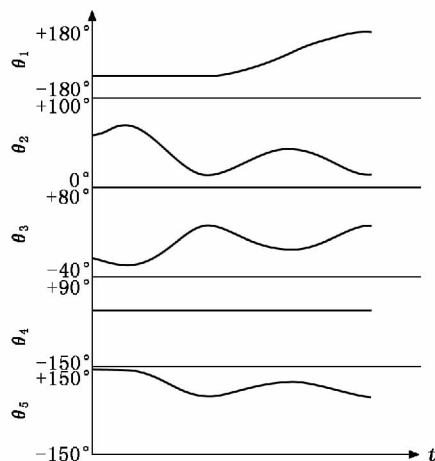


图 6 各关节角度随时间变化图

### 4 结束语

空间直线和圆弧的轨迹规划算法是最基础的算法,已经广泛应用于工业机器人中。以自行设计的五自由度喷涂机器人为实验平台,通过示教的方式,记录一系列离散的关节角度,再通过机器人运动学正解,求出这些点对应的末端执行器的位姿,在笛卡尔空间中,根据设定的运动进行轨迹规划,计算各插补点的位姿,再通过机器人运动学反解,将这些插补点的位姿反解为关节角度,最后由这些关节角控制机器人末端执行器沿着规划的轨迹运动。由于采用了基于抛物线过渡的空间直线插补算法和基于局部坐标系的空间圆弧插补算法,保证了机器人的运动平稳、平滑。

#### 参考文献:

- [1] 熊有伦. 机器人技术基础[M]. 武汉:华中理工大学出版社,1996.
- [2] 卢君宜,杨庆华,高峰,等. 五自由度农业采摘机器人轨迹规划[J]. 机电工程,2010(12):1-6.
- [3] 张凯,刘成良,付庄,等. 6R 机器人轨迹规划及其在焊接中的应用[J]. 机械设计,2002(10):20-23.
- [4] 王悦善,陈曾汉. 嵌入式数控系统实时插补加减速控制算法研究[J]. 煤炭技术,2012(2):25-26.
- [5] 王卫忠,赵杰,高永生,等. 机器人的平面曲线轨迹规划方法[J]. 哈尔滨工业大学学报,2008(3):389-392.

## Trajectory Planning of Industrial Robot in Cartesian Space

LIN Wei, JIANG Wu-jiang

(School of Mechanical Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** This paper studies the linear and circular trajectory planning problem of industry robot in Cartesian space, presents the space linear interpolation algorithm based on spatial parabolic transition and circular interpolation algorithm based on local coordinate system. The above algorithms are applied to a self-designed spraying robot with five degrees of freedom. Experimental results show the linear and circular interpolation algorithms can ensure that the robot runs smoothly and trajectory convergence is smooth.

**Key words:** industrial robot; Cartesian space; trajectory planning; spatial interpolation