

## 机械臂正运动学分析

由机械臂各关节角度求解出其末端位姿的过程称为正运动学，通过正运动学模型，给定机器人各关节角度即可求解出机械臂基座坐标系至末端坐标系的转换关系。本项目以 UR5 机械臂作为辅助臂进行抓引线操作，因此我们建立 UR5 的运动学模型。

如图 1 所示，六自由度的 UR5 包括 1 个自由度的腰关节、肩关节、肘关节及 3 个自由度的腕关节，与人类胳膊的结构较为相似，活动范围较广。

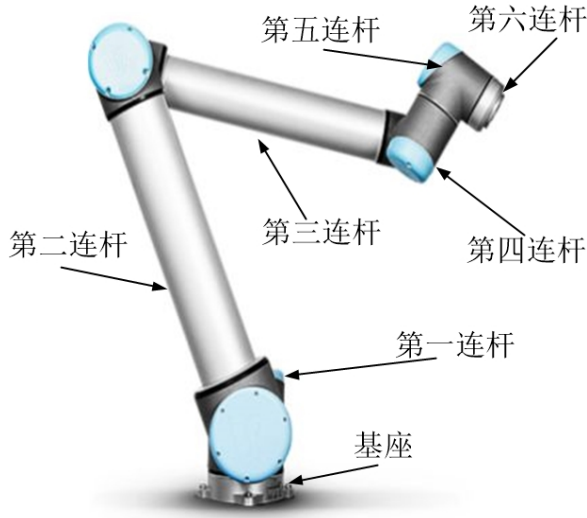


图 1 UR5 机械臂

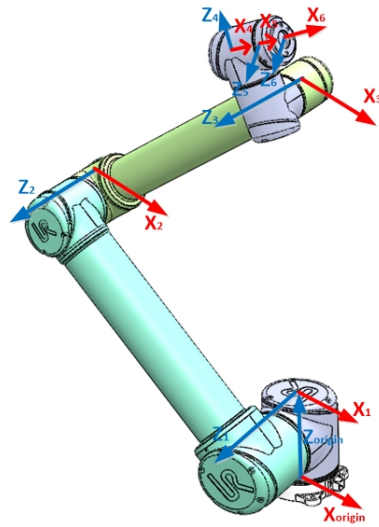


图 2 UR5 机械臂连杆坐标系示意图

图 2 为在 UR5 机械臂上建立的连杆坐标系示意图。UR5 机械臂的 D-H 参数如表 1 所示。

表 1 UR5 机器人 DH 参数表

关节 $i$	$\alpha_i / (^\circ)$	$a_i / (\text{mm})$	$d_i / (\text{mm})$	$\theta_i / (^\circ)$	关节范围/ $(^\circ)$
1	90°	0	$d_1(89.159)$	$\theta_1$	-360° ~ 360°
2	0	$a_2(-425)$	0	$\theta_2$	-360° ~ 360°
3	0	$a_3(-392.25)$	0	$\theta_3$	-360° ~ 360°
4	90°	0	$d_4(109.15)$	$\theta_4$	-360° ~ 360°
5	-90°	0	$d_5(94.65)$	$\theta_5$	-360° ~ 360°
6	0	0	$d_6(82.3)$	$\theta_6$	-360° ~ 360°

用 D-H 法建立坐标系，则连杆  $i$  的位姿变换矩阵表示为：

$$A_i = \text{Rot}(z_i, \theta_i) \text{Trans}(0, 0, d_i) \text{Trans}(\alpha_i, 0, 0) \text{Rot}(x_i, \alpha_i) \quad (1)$$

式中， $A_i$  是表示连杆  $i$  相对于  $i-1$  的位姿矩阵，代入齐次坐标变换公式  ${}^A p = {}^A T^B p$  中可得：

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

将各连杆之间的位姿变换矩阵相乘,即可得到机械臂末端坐标系相对于基坐标系的位姿变换矩阵  $T$  :

$$T = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

将表 1 中数据代入式(2)和(3)中即可得到正运动学的求解方程,为了缩短表达式长度,将  $\sin \theta_i$  表示为  $s_i$ 、 $\cos \theta_i$  表示为  $c_i$ 、 $\sin(\theta_i + \theta_j)$  表示为  $s_{ij}$ , 以此类推,则式(3)中的各项结果为:

$$\begin{cases} n_x = -s_6 c_1 s_{234} + c_6 (s_1 s_5 + c_{234} c_1 c_5) \\ n_y = -s_1 s_6 s_{234} - c_6 (s_5 c_1 - s_1 c_5 c_{234}) \\ n_z = s_6 c_{234} + c_5 c_6 s_{234} \\ o_x = -s_6 (s_1 s_5 + c_1 c_5 c_{234}) - c_1 c_6 s_{234} \\ o_y = -s_1 c_6 s_{234} + s_6 (s_5 c_1 - s_1 c_5 c_{234}) \\ o_z = -s_6 c_5 s_{234} + c_6 c_{234} \\ a_x = s_1 c_5 - s_5 c_1 c_{234} \\ a_y = -s_1 s_5 c_{234} - c_1 c_5 \\ a_z = -s_5 s_{234} \\ p_x = a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1 c_{23} + d_4 s_1 + d_5 c_1 s_{234} + d_6 (c_5 s_1 - c_{234} c_1 s_5) \\ p_y = a_2 s_1 c_2 + a_3 s_1 c_{23} - d_4 c_1 + d_5 s_1 s_{234} - d_6 (c_1 c_5 + s_1 s_5 c_{234}) \\ p_z = d_1 + a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_5 c_{234} - d_6 s_5 s_{234} \end{cases}$$